数理解析研究所講究録
102巻 1970年 58-70

Hard coreをもつSchrödinger作用素

日大 理工　　大枝 一男

§1. 序

まず問題の背景を述べる。原子核物理学で周知の事実であるが、核力には近距離においてきわめて強い斥力を及ぼす部分(hard core)がある。物理ではポテンシャルのきわめて強い斥力部分を無限大のポテンシャルで近似することをhard core近似と呼んでいるが、ここでは逆にポテンシャルの無限大の部分を高いポテンシャルで近似することを考える。

ある個所でポテンシャルが無限に高くなれば、その部分には粒子が入り込むことが出来なくなる。これはその個所に物体がある場合に相当すると予想される。

ここでは、藤田宏氏の提案により、Schrödinger方程式のディリクレ問題の近似を扱う。得られた結果は、離散固有値とその固有函数の収束である。(連続スペクトルとその固有函数の収束については、最近、今野礼二氏により肯定的な

結果が得られた。)

尚、もともとは、有界領域中に物体がある場合の内部ディリクレ問題から出発した。その場合の固有函数の強収束は領域の有界性から簡単に示せる。しかし、外部領域の場合には、後に述べる今野礼二氏による補題が本質的である。

ところで、物体を高いポテンシャルで近似することについては、P. D. Lax と R. S. Phillips も取扱っている。一方、E. C. Titchmarsh は二次元の場合に適当な領域の周囲に高いポテンシャル障壁をつくり、それを無限大にする問題を扱っている。ノイマン問題に関する類似の議論は P. Werner が波動方程式に於て、適当な領域の境界でダンピング定数を無限大にするという考え方で扱っている。

§.2. 定義と主な結果

K は R^3 のコンパクト集合, ∂K は C^2-クラスとする。$\Omega \equiv R^3 - K$。

$q(x)$ は次の条件をみたす。

C.1) K 内では有界

C.2) K の外部では有限個の特異点 p_i を持ってもよい。且つ、次の評価をみたす。 $|q(x)| \leq \dfrac{const.}{|x-p_i|^{3/2-\varepsilon}}$ (p_i の近傍)

c.3) $\quad \left| q(x) \right| \leqq \dfrac{\text{const.}}{|x|^{\alpha}} \qquad |x| \geqq R\,(\text{十分大}),\ \alpha > 0$

operator A_n in $L^2(R^3)$ を次のように定義する。

χ_K は、K 上の特性函数である。

d.1) $\begin{cases} A_n u \equiv -\Delta u + qu + n\chi_K u, & u \in \mathcal{D}(A_n) \\ \mathcal{D}(A_n) = \mathcal{E}^2_{L^2}(R^3) \end{cases}$

外部ディリクレ問題に対応する operator in $L^2(\Omega)$ を次のように定義する。

d.2) $\begin{cases} Au \equiv -\Delta u + qu, & u \in \mathcal{D}(A) \\ \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \cap \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega) \end{cases}$

命題

$L^2(R^3)$ の有界自己共役作用素 G で以下の事柄を満足するものが存在する。ただし $k\,(>0)$ は十分大とする。

1) $\quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} (A_n + k)^{-1} u = Gu \qquad$ in $L^2(R^3)$

2) $L^2(R^3) = L^2(K) \oplus L^2(\Omega)$ と直和分解するとき $L^2(K)$, $L^2(\Omega)$ は G を reduce。

ただし $L^2(K) = \chi_K \cdot L^2(R^3)$, $L^2(\Omega) = \chi_\Omega \cdot L^2(R^3)$ とみなす。

3) $\forall u \in L^2(K)$, $Gu = 0$

$\forall u \in L^2(\Omega)$, $Gu = (A+t)^{-1} \cdot u|_{\Omega}$

$q(x)$ が仮定をみたすとき、A_n, A の負のスペクトルはもしあれば、discrete である。集積点はもしあっても 0 以外にない。そこで A_n, 及び A の負の固有値を下から番号付けして、$\lambda_j^{(n)}$, λ_j と書く。ただし、縮退がある場には、重複して数える。対応する固有函数を $\varphi_j^{(n)}$, φ_j とする。なお、既に正規直交化してあるとする。

定理.

1) $\lambda_j^{(n)} \longrightarrow \lambda_j \quad (n \to \infty)$

2) $\varphi_j^{(n)} \longrightarrow \varphi_j \quad (n \to \infty)$ strong in $L^2(R^3)$

固有函数の強収束を示すには、今野礼二氏により証明された次の補題が本質的である。(cf. Roze [4])

補題.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\displaystyle\int_{|x| \geq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx < \varepsilon$, r は n, j によらない

§3. 命題の証明

A_n, A は対称作用素として下に有界であるから、$\lambda>0$ を十分大にとれば、$A_n+\lambda$, $A+\lambda$ は正値自己共役である。従って有界正値自己共役な逆作用素 $(A_n+\lambda)^{-1}$ が存在する。しかも、それらは、n について単調減少列をなす。更に、$\|(A_n+\lambda)^{-1}\|$ は n について有界である。従って、$(A_n+\lambda)^{-1}$ は、$L^2(R^3)$ のある有界自己共役作用素 G に強収束する。

よって (1) が示された。

(2) 以下の証明を行う。

$\forall u\in L^2(R^3)$ を固定する。　$(A_n+\lambda)^{-1}u\equiv f_n$ とおく。

$\|(A_n+\lambda)^{-1}\|\leqq M$　(n について一様) だから

$$M\|u\|^2\geqq((A_n+\lambda)f_n,f_n)\geqq(1-\varepsilon)\|\mathrm{grad}\,f_n\|^2+(q_+f_n,f_n)+(\lambda-\beta_\varepsilon)\|f_n\|^2+n\|\chi_K f_n\|^2$$

ただし、$1-\varepsilon>0$, $\lambda-\beta_\varepsilon>0$, $q_+\geqq 0$.　①

$\therefore M\|u\|^2\geqq n\|\chi_K f_n\|^2$　　$\therefore \|\chi_K f_n\|\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$

一方、$Gu\equiv g$ とおくと $f_n\longrightarrow g$ strong in $L^2(R^3)$

かつ、①より $M\cdot\|u\|^2\geqq(1-\varepsilon)\|\mathrm{grad}\,f_n\|^2$

$\therefore$ $\{f_n\}$ は $\mathcal{E}^1_{L^2}(R^3)$ の有界列　②

$\therefore$ $g\in\mathcal{E}^1_{L^2}(R^3)$ かつ $\mathrm{grad}\,f_n\xrightarrow{w.}\mathrm{grad}\,g$ in $L^2(R^3)$　③

ところが、$g\in\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ とみなすことが出来る。

実際、$\|\chi_K g\|=0$,　$\|\gamma_K g\|\leqq C\|g\|_{\mathcal{E}^1_{L^2}(K)}=0$ より示せる。

$L^2(\Omega)$, $L^2(K)$ がGをreduceしていることを示す。
上のことより、特に $u\in L^2(\Omega)$ に対しても $g\in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ である。
一方, $u\in L^2(K)$ に対しては

$u=(A_n+t)f_n=\chi_K(A_n+t)f_n$ だから

$$\|u\|\cdot\|\chi_K f_n\|\geq\left((A_n+t)f_n,\chi_K f_n\right)\geq\gamma\|f_n\|^2$$

$$\therefore\ \|f_n\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)\qquad \therefore\ g=Gu=0$$

従って、$L^2(\Omega)$, $L^2(K)$ はGをreduceしている。

次に、$\forall u\in L^2(\Omega)$ のとき、$g=Gu=(A+t)^{-1}u|_\Omega$ を示す。
それには、$L^2(\Omega)$ で $(A+t)g=u$ であればよい。
実際, $f_n=(A_n+t)^{-1}u$, $g=Gu$ であることを考慮して、
$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ に対して、

$$\begin{aligned}(u,\varphi)_{L^2(\Omega)}&=\left((A_n+t)f_n,\ \varphi\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(\operatorname{grad}f_n,\operatorname{grad}\varphi)_{L^2(\Omega)}+\left((q+t)f_n,\varphi\right)_{L^2(\Omega)}\\&\longrightarrow(\operatorname{grad}g,\operatorname{grad}\varphi)_{L^2(\Omega)}+\left((q+t)g,\varphi\right)_{L^2(\Omega)}\\&=\left((A+t)g,\varphi\right)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\therefore\ (A+t)g=u\quad\text{in } L^2(\Omega)$$

$$\therefore\ g=Gu=(A+t)^{-1}u$$

§4. 定理の証明

$\lambda_s \neq \lambda_{s+1}$ のとき $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ を含む、しかるべき区間を I_s とする。具体的には、　$I_s = [-\alpha_0, -\alpha_s]$,　$\alpha_0, \alpha_s > 0$

ただし、A_1の最低固有値$\lambda_1^{(1)}$として, $-t < \alpha_0 < \lambda_1^{(1)}$, $\lambda_s < -\alpha_s < \lambda_{s+1}$

対応する区間 $I_s' = \left[\frac{1}{-\alpha_s + t}, \frac{1}{-\alpha_0 + t}\right] \equiv [\alpha_s', \alpha_0']$

$A_n, A, (A_n+t)^{-1}, (A+t)^{-1}, G$ の単位の分解を E_n, E, E_n', E', E_G とする。

証明に入る。　区間I_s に注目する。

なお、Aの負の固有値が可算無限個のときは、s は $\lambda_s \neq \lambda_{s+1}$ なる任意の番号について議論する。　有限な $s(\geqq 0)$ 個の負固有値を持つ場合には、それに対応する I_sを考えれば十分である。

まず、$s\text{-}\lim_{n\to\infty}(A_n+t)^{-1} = G$ だから $s\text{-}\lim_{n\to\infty} E_n'(\lambda) = E_G(\lambda)$, $\lambda \notin \sigma_p(G)$

$\therefore\ {}^{\exists}n_0,\ {}^{\forall}n \geqq n_0,\ \dim E_n(I_s') \geqq \dim E_G(I_s') = \dim E'(I_s') = s$

一方、A_n は単調増加だから

$$\dim E_n(I_s) \geqq \dim E_{n+1}(I_s)$$

$\therefore \dim E_1(I_s) \geqq \dim E_2(I_s) \geqq \cdots \geqq \dim E_n(I_s) \geqq \cdots \geqq \dim E(I_s) = s$　　④

今、$\lambda_p^{(n)}$ $(p \leqq s)$ に注目すると、$\lambda_p^{(n)} \longrightarrow {}^{\exists}\mu_p \leqq 0$　$(n\to\infty)$

ところが、もし、$\mu_p=0$ とすると、$\mu_{p-r}=0$ ($\forall r\geqq 1$) となり④に矛盾。 従って、$\mu_p<0$ である。

よって、Aの負固有値が可算無限個の時は、任意の j について $\lambda_j^{(n)}$ はある $\mu_j<0$ に収束する。 有限な S個($S\geqq 0$) の時は $\lambda_j^{(n)}$ ($1\leqq j\leqq S$) は $\mu_j<0$ に収束する。 $\lambda_j^{(n)}$ ($j\geqq S+1$) については、後で吟味する。

命題の証明と類似の計算により、

$$\mu_j+t\geqq\lambda_j^{(n)}+t=\left((A_n+t)\varphi_j^{(n)},\varphi_j^{(n)}\right)$$

$$\geqq(1-\varepsilon)\|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}\|^2+(q_+\varphi_j^{(n)},\varphi_j^{(n)})+(t-\beta_\varepsilon)\|\varphi_j^{(n)}\|^2+n\|\chi_K\varphi_j^{(n)}\|^2 \quad ①'$$

これより、$\{\varphi_j^{(n)}\}$ は $\mathcal{E}^1_{L^2}(R^3)$ の有界列となり 適当な部分列 $\{\varphi_j^{(n')}\}$ が存在して、 $\varphi_j^{(n')}\xrightarrow{w.}\tilde{\varphi}_j\in L^2(R^3)$

ここで $\varphi_j^{(n')}$ の弱収束は 補題を使えば強収束になることが示される。 すなわち、

$$\|\varphi_j^{(n')}-\tilde{\varphi}_j\|^2_{L^2(R^3)}=\|\varphi_j^{(n')}-\tilde{\varphi}_j\|^2_{L^2(|x|\leqq R)}+\|\varphi_j^{(n')}-\tilde{\varphi}_j\|^2_{L^2(|x|\geqq R)}$$

第2項: 補題よりR十分大で $\|\varphi_j^{(n')}-\tilde{\varphi}_j\|^2_{L^2(|x|\geqq R)}<2\varepsilon/3$

第1項: 上で定めたRを固定。Rellich の選出定理により、 n'十分大で $\|\varphi_j^{(n')}-\tilde{\varphi}_j\|^2_{L^2(|x|\leqq R)}<\varepsilon/3$

$$\therefore \quad \| \varphi_j^{(n')} - \tilde{\varphi}_j \|^2_{L^2(R^3)} < \varepsilon$$

$$\therefore \varphi_j^{(n')} \xrightarrow{n' \to \infty} \tilde{\varphi}_j \quad \text{strong in } L^2(R^3) \qquad ⑤$$

更に、 $\tilde{\varphi}_j \in \mathfrak{D} |_{L^2(\Omega)}$, $\operatorname{grad} \varphi_j^{(n')} \xrightarrow{w.} \operatorname{grad} \tilde{\varphi}_j$

従って、 $A\tilde{\varphi}_j = \mu_j \tilde{\varphi}_j \quad \text{in } L^2(\Omega)$

$\varphi_j^{(n')} \xrightarrow{st.} \tilde{\varphi}_j$ が示されているので、部分列の取り方を適当に選べば $\{\varphi_j^{(n')}\}$ の正規直交性が $\{\tilde{\varphi}_j\}$ についても保存される。このことを考慮すれば次のことが分る。

Aの負固有値を(多重度を重複して数えないで)下から番号付けして, λ_k, λ_kの多重度をm_k, 小区間I_kを

$I_k = (\alpha_k, \beta_k)$, $\alpha_k < \lambda_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$, $-\text{大} < \alpha_1$

とすれば $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \dim E_n(I_k) = m_k$

I_kの巾は任意に小さくとれるから, $n \to \infty$のときA_nの負固有値は多重度も含めてAの負固有値に収束する。Aの負固有値が有限なS個の時は十分大なるnより先で$\lambda_j^{(n)}$が存在しなくなるか、又は0に収束することも分る。(ただしS=0も含む)

尚、$\tilde{\varphi}_j$より改めて、$E_n'(I_j')\tilde{\varphi}_j$をつくると、同じ固有値に属する$\tilde{\varphi}_j$(縮退がある場合)は、n十分大で一次独立である。そこで、これより更に改めて正規直交固有函数を作りそれをφ_jと書き直せばφ_jは部分列をとることなく強収束する。μ_jをλ_jと書く。

§.5. 補題の証明（今野礼二氏による）

$\Omega_{a,b} \equiv \{a<|x|<b\}$,　$\Omega_a \equiv \{|x|>a\}$,　$S_a \equiv \{|x|=a\}$,

$(\ ,\ )$ は3次元ベクトルの内積

$\|\varphi_j^{(n)}\|_{\mathcal{E}_{L^2}^1(R^3)} \leqq M$　（nによらない）を使う。

一方、

$|q(x)| \leqq \dfrac{C}{|x|^\alpha}$,　$|x| \geqq R$（十分大）, $\alpha > 0$　であった。

目標とする式は

$$1>\alpha>0,\quad \exists r_1,\quad \forall r>r_1,\quad \int_{|x|\geqq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq \frac{C}{r^\alpha} \quad (n\text{によらない})$$

$$\alpha \geqq 1,\quad \exists r_1,\quad \forall r>r_1\quad \int_{|x|\geqq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq \frac{C}{r} \quad (n\text{によらない})$$

そのためにまず次式を求める。

$$1>\alpha>0,\quad \exists r_1,\ \exists M\quad \int_{|x|\geqq r_1} |x|^\alpha \left(|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}|^2 - \lambda_j^{(n)} |\varphi_j^{(n)}|^2\right) dx \leqq M \quad (n\text{によらない})$$

$$\alpha \geqq 1,\quad \exists r_1,\ \exists M\quad \int_{|x|\geqq r_1} |x| \left(|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}|^2 - \lambda_j^{(n)} |\varphi_j^{(n)}|^2\right) dx \leqq M \quad (n\text{によらない})$$

<u>$1>\alpha>0$ のとき.</u>

$$\int_{\Omega_{a,b}} |x|^\alpha \left(|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}|^2 - \lambda_j^{(n)} |\varphi_j^{(n)}|^2\right) dx = -a^{\alpha-1} \int_{S_a} (\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, x)\, \varphi_j^{(n)} dS$$

$$+ b^{\alpha-1} \int_{S_b} (\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, x)\, \varphi_j^{(n)} dS - \int_{\Omega_{a,b}} \left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, \frac{\alpha x}{|x|^{2-\alpha}}\right) \varphi_j^{(n)} dx - \int_{\Omega_{a,b}} |x|^\alpha q \cdot |\varphi_j^{(n)}|^2 dx$$

$$\leqq a^{\alpha-1}\int_{S_a} \left|(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, x)\varphi_j^{(m)}\right| dS + b^{\alpha-1}\int_{S_b} \left|(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, x)\varphi_j^{(m)}\right| dS$$

$$+ \int_{\Omega_{a,b}} \left|\left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, \frac{\alpha x}{|x|^{2-\alpha}}\right)\varphi_j^{(m)}\right| dx + \int_{\Omega_{a,b}} |x|^{\alpha}|q|\cdot|\varphi_j^{(m)}|^2 dx \qquad ⑥$$

第4項 $\leqq \int_{\Omega_{a,b}} |x|^{\alpha}\frac{C}{|x|^{\alpha}}\cdot|\varphi_j^{(m)}|^2 dx = C$, $\quad a \geqq {}^{\exists} r_0$, ($m$によらない) ⑦

第3項 $\leqq \int_{\Omega_{a,b}} |\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}|\cdot\left|\frac{\alpha x}{|x|^{2-\alpha}}\right|\cdot|\varphi_j^{(m)}| dx \leqq \alpha \int_{\Omega_{a,b}} |\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}|\cdot|\varphi_j^{(m)}| dx$

$$\leqq \alpha \|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}\|_{L^2(R^3)}\cdot\|\varphi_j^{(m)}\|_{L^2(R^3)} \leqq \alpha M$$ (mによらない) ⑧

第2項について.

まず $\left\| \left|\left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, \frac{x}{|x|^{2-\alpha}}\right)\varphi_j^{(m)}\right| \right\|_{L^1(|x|\geqq 1)} \leqq M$ ⑨

$\therefore \int_{S_b} \left|\left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, \frac{x}{b^{2-\alpha}}\right)\varphi_j^{(m)}\right| dS \in L^1(1,\infty)$

従って $\exists (b_k)_{k=1,2,\cdots} \longrightarrow \infty$, 下式が成立つ。

$$b_k^{\alpha-1}\int_{S_{b_k}} \left|(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, x)\varphi_j^{(m)}\right| dS = b_k \int_{S_{b_k}} \left|\left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, \frac{x}{b_k^{2-\alpha}}\right)\varphi_j^{(m)}\right| dS \longrightarrow 0 \ (k\to\infty)$$

第1項について.

⑨より. $r_0 \leqq a \leqq r_0+1$ なるaが存在して

$$a^{\alpha-1}\int_{S_a} \left|(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, x)\varphi_j^{(m)}\right| dS = a\int_{S_a} \left|\left(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(m)}, \frac{x}{|x|^{2-\alpha}}\right)\varphi_j^{(m)}\right| dS \leqq (r_0+1)M$$

以上まとめて、次式がnによらず成立つ。

$$\exists r_0,\ \int_{|x|>r_0+1} |x|^\alpha \left(|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}|^2 - \lambda_j^{(n)} |\varphi_j^{(n)}|^2 \right) dx \leqq (r_0+1)M + M + C = M'$$

$\lambda_j^{(n)} \longrightarrow \lambda_j < 0$ であるので、適当に定数を取り直して、

$r_0 + 1 = r_1$ とおけば、

$$\int |x|^\alpha |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq c \qquad (nによらない)$$

$$\therefore \forall r > r_1 \quad r^\alpha \int_{|x|\geqq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq \int_{|x|>r_1} |x|^\alpha |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq c$$

$$\therefore \forall r > r_1 \quad \int_{|x|\geqq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq \frac{c}{r^\alpha} \qquad (nによらない)$$

<u>$\alpha \geqq 1$ のとき.</u>

$$\int |x| \left(|\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}|^2 - \lambda_j^{(n)} |\varphi_j^{(n)}|^2 \right) dx$$

$$\leqq \int_{S_a} |(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, x)\varphi_j^{(n)}| dS + \int_{S_b} |(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, x)\varphi_j^{(n)}| dS + \int_{\Omega_{a,b}} |(\mathrm{grad}\,\varphi_j^{(n)}, \tfrac{x}{|x|})\varphi_j^{(n)}| dx$$

$$+ \int_{\Omega_{a,b}} |x|\,|q|\,|\varphi_j^{(n)}|^2 dx$$

$$第4項 \leqq \int_{\Omega_{a,b}} |x| \cdot \frac{c}{|x|^\alpha} \cdot |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq c, \quad a \geqq \overset{\exists}{r_0} \qquad (nによらない)$$

以下同様にして

$$\exists r_1,\ \forall r > r_1 \qquad \int_{|x|\geqq r} |\varphi_j^{(n)}|^2 dx \leqq \frac{c}{r} \qquad (nによらない)$$

参考文献

[1] P. D. Lax and R. S. Phillips
Purely decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle
pre-print, Stanford university, 1968.

[2] E.C. Titchmarsh
Eigenfunction expansions for a finite two-dimensional region
Qurat. Journ. of. Math (Oxford), vol20, Dec, 1949, pp238–53

[3] P. Werner
Ein Grenzübergang in der Theorie akustischer Wellenfelder
Arch. Rational Mech. Anal. Vol33. No.3 (1969) p192–218

[4] Roze
On the spectre of a second order elliptic operator
Mat. Sbornik. vol80 (1969) pp195–209.